

QCM :

- ① Faux. f est bornée \Rightarrow elle admet un majorant et un minorant. Contre-exemple : $x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$.
- ② Faux. Par exemple, $2 \in [-1, +\infty[$ mais $-2 \notin [-1, +\infty[$.
- ③ Vrai. $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \times 0 + (-1) \times 3 = -3$.
- ④ Faux. \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires de même sens.

Exercice 1 :

① $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

② a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

avec : $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$ et $\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 2 = 6$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$

b) ► Sur $]-\infty, -2]$, soient a et b deux réels tels que $a \leq b \leq -2$

$\Rightarrow a+2 \leq b+2 \leq 0 \Rightarrow (a+2)^2 \geq (b+2)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(a+2)^2 - 3 \geq \frac{1}{2}(b+2)^2 - 3$
 $\Rightarrow f(a) \geq f(b)$ donc f est décroissante sur $]-\infty, -2]$.

► Sur $[-2, +\infty[$, soient a et b deux réels tels que $-2 \leq a \leq b$

$\Rightarrow 0 \leq a+2 \leq b+2 \Rightarrow (a+2)^2 \leq (b+2)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(a+2)^2 - 3 \leq \frac{1}{2}(b+2)^2 - 3$
 $\Rightarrow f(a) \leq f(b)$ donc f est croissante sur $[2, +\infty[$.

c) \mathcal{E}_f est une parabole de sommet $S(-2, -3)$, d'axe la droite d'équation $x = -2$ et dirigée vers le haut.

d) (voir figure)

③ a) $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. On a $3 \in \mathcal{D}_g$ mais $-3 \notin \mathcal{D}_g$ donc g est ni paire ni impaire.



في دارك... إتهون على قرابتة إصغارك



b) Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{E}_f et \mathcal{E}_g sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = \frac{-3}{x+3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\right)(x+3) = -3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - x + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3 = -3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x(x^2 + 7x + 10) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0} \text{ ou } x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 10 = 9 \Rightarrow x' = \frac{-7-3}{2} = \boxed{-5} \text{ et } x'' = \frac{-7+3}{2} = \boxed{-2}$$

donc $A(-5, g(-5))$, $B(-2, g(-2))$ et $C(0, g(0))$.

c'est à dire $A\left(-5, \frac{3}{2}\right)$, $B(-2, -3)$ et $C(0, -1)$ sont les points d'intersection de \mathcal{E}_f et \mathcal{E}_g .

c) L'expression $g(x) = \frac{-3}{x+3}$ est de la forme $\frac{ax+b}{cx+d}$ donc \mathcal{E}_g est une hyperbole de centre $I(-3, 0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -3$ et $y = 0$.

d) (voir figure)

④ a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $h(-x) = \frac{-3}{|-x|+3} = \frac{-3}{|x|+3} = h(x)$

donc h est paire.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|+3 > 0$ et $-3 < 0$ donc $\frac{-3}{|x|+3} < 0$ donc $h(x) < 0$

c'est à dire h est majorée par 0.

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0 \Rightarrow |x|+3 \geq 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x|+3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-3}{|x|+3} \geq -1$$

c'est à dire h est minorée par -1.

c) ▶ Sur $]-\infty, 0]$, soient a et b deux réels tels que $a \leq b \leq 0$

$$\Rightarrow |a| \geq |b| \Rightarrow |a|+3 \geq |b|+3 \Rightarrow \frac{1}{|a|+3} \leq \frac{1}{|b|+3} \Rightarrow \frac{-3}{|a|+3} \geq \frac{-3}{|b|+3}$$

$\Rightarrow h(a) \geq h(b)$ et par suite h est décroissante sur $]-\infty, 0]$

▶ Sur $[0, +\infty[$, soient a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$

$$\Rightarrow |a| \leq |b| \Rightarrow |a|+3 \leq |b|+3 \Rightarrow \frac{1}{|a|+3} \geq \frac{1}{|b|+3} \Rightarrow \frac{-3}{|a|+3} \leq \frac{-3}{|b|+3}$$

$\Rightarrow h(a) \leq h(b)$ et par suite h est croissante sur $[0, +\infty[$



في دارك... انتهمون علمي قرابتة اصغارك

d) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $|x| = x \implies h(x) = \frac{-3}{|x|+3} = \frac{-3}{x+3} = g(x)$

e) Pour tout $x \geq 0$, $h(x) = g(x)$ donc \mathcal{C}_h est confondue avec \mathcal{C}_g sur $[0, +\infty[$.

De plus h est paire donc \mathcal{C}_h est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

D'où la construction de h sur $] -\infty, 0]$ s'obtient par symétrie de celle de \mathcal{C}_g par rapport à (O, \vec{j}) .

(voir figure)

⑤ a) $\frac{-3}{x+3} \geq 0 \iff g(x) \geq 0$.

Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de \mathcal{C}_g d'ordonnée positive.

Graphiquement : $S_R =]-\infty, -3[$

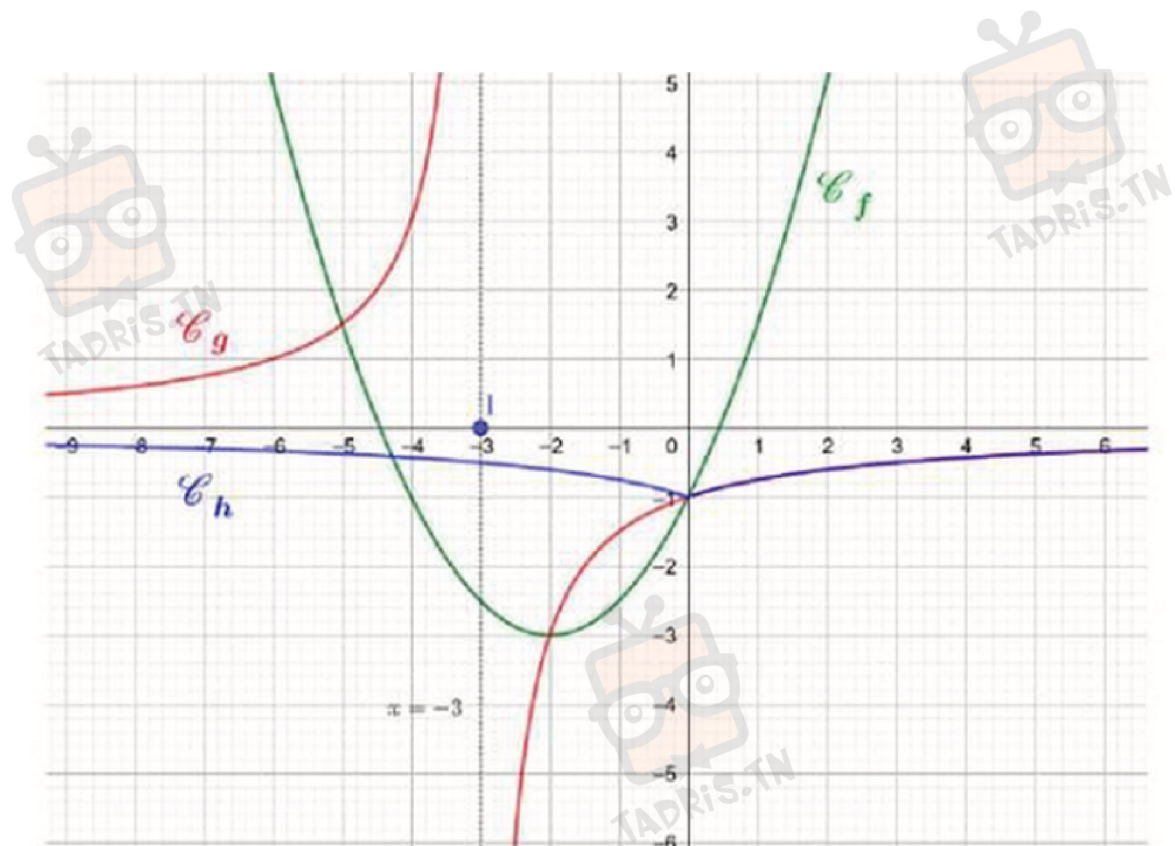
b) $\frac{-3}{x+3} \geq \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \iff g(x) \geq f(x)$

Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de \mathcal{C}_g qui sont au dessus de ceux de \mathcal{C}_f .

Graphiquement : $S_R = [-5; -3[\cup [-2; 0]$.

c) $h(x) > \frac{-1}{2}$

Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de \mathcal{C}_h qui sont au dessus de la droite



في دارك... إتهون علمو قرابتة إصغارك

Exercice 2

- 1) a) Le projeté orthogonal de E sur (DA) est A. Donc :

$$\vec{DA} \cdot \vec{DE} = \vec{DA} \cdot \vec{DA} = DA^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

- b) On a : $\vec{DA} \cdot \vec{DE} = DA \cdot DE \cdot \cos \widehat{ADE}$

$$\Rightarrow DE = \frac{\vec{DA} \cdot \vec{DE}}{DA \cdot \cos \widehat{ADE}} = \frac{3}{\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

Pythagore : $DA^2 + AE^2 = DE^2$

$$\Rightarrow AE^2 = DE^2 - DA^2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow AE = 1$$

- 2) a) Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AE} sont colinéaires de même sens.

$$\text{Donc } \vec{AB} \cdot \vec{AE} = AB \cdot AE = \sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$$

Les vecteurs \vec{AD} et \vec{AG} sont colinéaires de sens contraires.

$$\text{Donc } \vec{AD} \cdot \vec{AG} = -AD \cdot AG = -\sqrt{3} \cdot 1 = -\sqrt{3}$$

- b) $\vec{DE} \cdot \vec{BG} = (\vec{DA} + \vec{AE}) \cdot (\vec{BA} - \vec{AG})$

$$= \underbrace{\vec{DA} \cdot \vec{BA}}_0 - \underbrace{\vec{AD} \cdot \vec{AG}}_{-\sqrt{3}} - \underbrace{\vec{AE} \cdot \vec{AB}}_{\sqrt{3}} + \underbrace{\vec{AE} \cdot \vec{AG}}_0 = 0$$

D'où (DE) et (BG) sont perpendiculaires

- 3) a) $\vec{DE} \cdot \vec{DB} = (\vec{DA} + \vec{AE}) \cdot (\vec{DA} + \vec{AB})$

$$= DA^2 + \underbrace{\vec{DA} \cdot \vec{AB}}_0 + \underbrace{\vec{AE} \cdot \vec{DA}}_0 + \underbrace{\vec{AE} \cdot \vec{AB}}_{\sqrt{3}} = 3 + \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \frac{3 + \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{c) On a : } \widehat{BDE} = \widehat{BDA} - \widehat{EDA} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Donc } \cos \frac{\pi}{3} = \cos \widehat{BDE} = \frac{\vec{DE} \cdot \vec{DB}}{DE \cdot DB}$$

Pythagore : $DB^2 = DA^2 + AB^2 = 6 \Rightarrow DB = \sqrt{6}$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned}
 4) \ a) \quad MA^2 + MC^2 &= \|\vec{MA}\|^2 + \|\vec{MC}\|^2 = \|\vec{MI} + \vec{IA}\|^2 + \|\vec{MI} + \vec{IC}\|^2 \\
 &= MI^2 + IA^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + MI^2 + IC^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IC} \\
 &= 2MI^2 + 2IA^2 + 2\vec{MI} \cdot (\underbrace{\vec{IA} + \vec{IC}}_0)
 \end{aligned}$$

Calcul de IA : $IA = ID = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow IA^2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

d'où $MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 2MI^2 + 3$

b) $MA^2 + MC^2 = 7 \Leftrightarrow 2MI^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow MI^2 = 2 \Leftrightarrow MI = \sqrt{2}$
 d'où \mathcal{C} est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.

5) a) $A(0;0), G(1;0), E(0;1), B(0, \sqrt{3})$

J est le milieu de $[BG] \Rightarrow \begin{cases} x_J = \frac{x_B + x_G}{2} = \frac{1}{2} \\ y_J = \frac{y_B + y_G}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

donc $J\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b)

$$\begin{cases} \vec{AG} = \begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{AJ} = \begin{pmatrix} x_J - x_A \\ y_J - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \vec{AG} \cdot \vec{AJ} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

c) $\vec{AG} \cdot \vec{AJ} = AG \cdot AJ \cdot \cos \widehat{GAJ} \Rightarrow \cos \widehat{GAJ} = \frac{\vec{AG} \cdot \vec{AJ}}{AG \cdot AJ}$

avec $AG = \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2} = 1$

et $AJ = \sqrt{(x_J - x_A)^2 + (y_J - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

donc $\cos \widehat{GAJ} = \frac{1}{2}$ et par suite $\widehat{GAJ} = \frac{\pi}{3}$



في دارك... إتهون علمو قرابتة إصغارك